Über die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung.

Von Dr. **C. Le Paige**,

Professor an der Universität in Lüttich.

Dieselbe Methode, nach welcher man die Anzahl der einer Fläche dritter Ordnung eingeschriebenen Pentaëder, für welche eine Fläche und eine in derselben gelegene Kante beliebig gewählt wird, bestimmen kann,[1] erlaubt uns auch, eine ähnliche Frage bezüglich der Hesse'schen Fläche der Flächen dritter Ordnung zu beantworten.

Bezieht man die Fläche auf das Sylvester'sche Pentaëder, so hat man die Gleichung:

$$\frac{a_1}{\alpha}+\frac{b_1}{\beta}+\frac{c_1}{\gamma}+\frac{d_1}{\delta}+\frac{e_1}{\omega}=0 \tag{1}$$

Wenn wir nun das Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta=0$ als Fundamentaltetraëder betrachten, so gilt eine Identität von der Form:

$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2\delta+e_2\omega\equiv 0. \tag{2}$$

Man kann leicht die Fläche durch Ebenenbüschel erzeugen, deren Axen die in der Ebene $\omega=0$ enthaltenen Kanten des Pentaëders sind. Betrachtet man die Ebenenbüschel:

$$\alpha-\lambda\omega=0,$$
$$\beta-\mu\omega=0,$$
$$\gamma-\nu\omega=0,$$
$$\delta-\rho\omega=0,$$

[1] Acta Mathematica, T. V, p. 195—202. Le Paige, „Nouvelles recherches sur les surfaces du 3e ordre.

und lässt man λ, μ, ν, ρ den Gleichungen:

$$\frac{a_1}{\lambda} + \frac{b_1}{\mu} + \frac{c_1}{\nu} + \frac{d_1}{\rho} + e_1 = 0,$$

$$a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\rho + e_2 = 0,$$

oder in anderer Form geschrieben, den Gleichungen:

$$f \equiv e_1\, \lambda\mu\nu\rho + d_1\, \lambda\mu\nu + c_1\, \lambda\mu\rho + b_1\, \lambda\nu\rho + a_1\, \mu\nu\rho = 0,$$
$$\varphi \equiv a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\rho + e_2 = 0,$$

Genüge leisten, so erfüllen die Ebenen, welche sich in Punkten der Hesse'schen Fläche H schneiden, diese beiden Gleichungen, sowie die Relation

$$\theta_1 f + \theta_2 \varphi = 0.$$

Wir haben gezeigt, dass man für jeden Werth von $\theta_1 : \theta_2$ diese Gleichung durch eine zweckmässige Transformation in die Form:

$$a_{1111}\, x_1 y_1 z_1 u_1 + a_{1122}\, x_1 y_1 z_2 u_2 + a_{1212}\, x_1 y_2 z_1 u_2 + a_{1221}\, x_1 y_2 z_2 u_1$$
$$+ a_{2112}\, x_2 y_1 z_1 n_2 + a_{2121}\, x_2 y_1 z_2 u_1 + a_{2211}\, x_2 y_2 z_1 u_1$$
$$+ a_{2222}\, x_2 y_2 z_2 u_2 = 0$$

zu bringen vermag.

Hieraus folgt, dass man die Gleichung der Hesse'schen Fläche auf unendlich viele Arten in die Form:

$$H \equiv a_{1111} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 + a_{1122}\, \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \delta_2 + a_{1212}\, \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \delta_2 + a_{1221}\, \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \delta_1 +$$
$$a_{2112}\, \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \delta_2 + a_{2121}\, \alpha_2 \beta_1 \gamma_2 \delta_1 + a_{2211} \alpha_2 \beta_2 \gamma_1 \delta_1 + a_{2222} \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2 = 0.$$

Man erkennt nun sofort, dass für $a_{2222} = 0$, das Tetraëder $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 = 0$ der Fläche eingeschrieben ist und mit der Ebene $\omega = 0$ des Fundamentalpentaëders ein neues der Hesse'schen Fläche eingeschriebenes Pentaëder bildet; ausserdem erkennt man, dass seine vier in $\omega = 0$ gelegenen Kanten ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche angehören. Das Verschwinden der anderen α-Coëfficienten liefert ähnliche Resultate, für deren Zustandekommen über das Verhältniss $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ zweckdienlich disponirt werden muss.

Für eine der fundamentalen biquadratischen Covarianten von $\theta_1 f + \theta_2 \varphi$ erhalten wir den Ausdruck:

$$\theta_1 \theta_2 [\lambda^4 (a_2^2 e_1^2 \theta_1 \theta_2 + 4 a_2 b_1 c_1 d_1 \theta_1^2) + 2\lambda^3 \{2 e_2 b_1 c_1 d_1 \theta_1^2 + (a_1 a_2 + e_1 e_2 - d_1 d_2 - c_1 c_2 - b_1 b_2) a_2 e_1 \theta_1 \theta_2\} + 2\lambda^2 \theta_1 \theta_2 \{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + d_1^2 d_2^2 + e_1^2 e_2^2 + 3 a_1 a_2 e_1 e_2 - 2(a_1 a_2 + e_1 e_2)(b_1 b_2 + c_1 c_2)\} + 2\lambda \{2 e_1 b_2 c_2 d_2 \theta_2^2 + (a_1 a_2 + e_1 e_2 - d_1 d_2 - c_1 c_2 - b_1 b_2) a_1 e_2 \theta_1 \theta_2\} + (a_1^2 e_2^2 \theta_1 \theta_2 + 4 a_1 b_2 c_2 d_2 \theta_2^2)].$$

Die Discriminante dieses Ausdruckes besitzt die Form:

$$\Delta = \theta_1^8 \theta_2^8 A_8^8,$$

und man erkennt leicht, dass in A_8^8 die Glieder, welche θ_1^8 und θ_2^8 enthalten, nicht verschwinden.

Wie wir in der Abhandlung über Flächen dritter Ordnung gezeigt haben, verschwindet einer der Coëfficienten von H, wenn $\Delta = 0$ wird; die im Allgemeinen von einander verschiedenen acht Werthe von $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ für welche A_8^8 verschwindet, liefern somit eingeschriebene Pentaëder:

„Man kann somit über jede Seitenfläche des fundamentalen Pentaëders acht Tetraëder construiren, von denen jedes mit jener Seitenfläche zusammen ein der Hesse'schen Fläche eingeschriebenes Pentaëder darstellt."

Diese wohl noch nicht bemerkte Eigenschaft führt zu einer nicht uninteressanten Erzeugung der Hesse'schen Fläche; doch soll zunächst die Construction einer allgemeinen Fläche gegeben werden.

Es seien A, B, C, D vier beliebige Punkte und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier beliebige Ebenen; jede Ebene des Raumes schneidet die vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in vier Geraden a, b, c, d und wir stellen uns nun die Frage nach dem Orte eines Punktes, welcher als der den vier Ebenen $(Aa), (Bb), (Cc), (Dd)$ gemeinsame Punkt auftritt. Der Ort eines solchen Punktes ist eine Fläche, deren Ordnung man folgendermassen bestimmen kann.

Es sei A_1 der Schnittpunkt von α mit irgend einer durch A gezogenen Geraden; die Ebenen des Bündels A_1 bestimmen auf β, γ, δ entsprechende Strahlen dreier collinearer Systeme, welche aus B, C, D respective projicirt drei collineare Bündel geben, deren Erzeugniss eine Fläche dritter Ordnung S_3 sein wird. Der fragliche Ort ist somit das Erzeugniss eines Bündels A von Strahlen und eines projectivischen Systemes von Flächen dritter Ordnung S_3. Dieser Ort ist somit eine Fläche vierter Ordnung S_4. Man erkennt sofort, dass die Kanten des Tetraëders $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ der Fläche S_4 angehören.

Lässt man die Ebene ε mit der Ebene $B\, C\, D$ zusammenfallen, so sieht man, dass die Schnittgerade der Ebene α mit der Ebene $B\, C\, D$ ebenfall der Fläche S_4 angehört u. s. w. So haben wir die Existenz von zehn Geraden auf der Fläche S_4, welche auch die Punkte A, B, C, D enthält, nachgewiesen.

Die Geraden a, b, c, d, in denen die Ebenen irgend eines Bündels P die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schneiden, gehören vier collinearen Systemen an, so dass die Ebenen (Aa), (Bb), (Cc), (Dd) vier collineare Bündel bilden, welche eine Curve sechster Ordnung G_6 vom Geschlechte drei zum Erzeugnisse haben; diese Curve G_6 gehört der Fläche S_4 an, und geht ersichtlich durch die Ecken des Tetraëders $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dessen Kanten sie zu Trisecanten hat.

Wenn die beiden Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta$, $ABCD$, in perspectivischer Lage sind, so dass sich also die vier Ebenenpaare α, BCD; β, CDA; γ, DAB, δ, ABC in vier Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 einer Ebene ω schneiden, so erhalten wir eine specielle Fläche S_4, für welche die oben erwähnten zehn Geraden die Kanten eines Pentaëders bilden.

Aus der einleitenden Betrachtung ergibt sich nun sofort, dass man die Hesse'sche Fläche H einer Fläche dritter Ordnung in der angegebenen Weise als Fläche S_4 erzeugen kann; es genügt zu dem Zwecke, aus vier Ebenen des fundamentalen Pentaëders das Tetraëder $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ zu bilden, und eines der über der fünften Ebene ω des Pentaëders construirbaren Tetraëder welche mit ω ein neues Pentaëder bilden, als das Tetraëder $ABCD$ zu betrachten.

Die sämmtlichen, auf S_4 liegenden Curven G_6, welche den einzelnen Punkten P des Raumes entsprechen, gehen durch die

zehn Scheitel des fundamentalen Pentaëders; durch irgend drei Punkte der Fläche S_4 kann man eine solche Curve G_6 hindurchlegen, da jene drei Punkte der Erzeugungsart der Fläche S_4 gemäss, drei Ebenen ε entsprechen, welche das Bündel P vollkommen bestimmen.

Je zwei Curven G_6 schneiden sich, ausser in den zehn Scheiteln des fundamentalen Pentaëders noch in vier weiteren Punkten. Um dies einzusehen, betrachten wir die Ebenen ε irgend eines Büschels l; dieselben bestimmen auf den Ebenen α, β, γ, δ vier Büschel von Strahlen a, b, c, d, welche in perspectivischer Beziehung sind und die somit aus den Punkten A, B, C, D projicirt, zu vier projectivischen Ebenenbüscheln führen. In den letzteren gibt es aber bekanntlich vier Gruppen von entsprechenden Ebenen, von denen jede Gruppe einen Punkt gemeinsam hat. Wenn wir also zwei Curven C_6, G'_6 betrachten, welche den Punkten P, Q entsprechen, so werden diese Curven jene vier Punkte gemeinsam haben, welche in der obigen Art durch das Ebenenbüschel $\overline{PQ}$ geliefert werden.

Die ebenen Schnitte der Fläche S_4 sind Curven vierter Ordnung ohne mehrfache Punkte. Denn, werden die sämmtlichen Punkte M des Raumes aus den Punkten A, B, C, D auf die Ebenen α, β, γ, δ respective projicirt, so umhüllen jene Ebenen, welche die vier Projectionen A_1, B_1, C_1, D_1 zugleich enthalten, eine Fläche Σ_4 vierter Classe, welche die Flächen des fundamentalen Pentaëders $ABCDT$ doppelt berührt, wobei T das perspectivische Centrum der beiden Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta$, $ABCD$ bedeutet. Bewegt sich M in einer Ebene, so beschreibt die Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine Developpable sechster Classe vom Geschlechte drei; hieraus folgt der ausgesprochene Satz, sowie man hieraus auch erkennt, dass S_4 keine mehrfachen Curven besitzt. Ebenso erkennt man auf Grund derselben Betrachtungen, dass der Punkt, welcher der Ebene ε entspricht, auf S_4 eine Curve G_{6n} $6n$-ter Ordnung beschreibt, wenn ε Tangentialebene einer Fläche n-ter Classe Σ_n bleibt. Denn die Ebenen, welche Punkten einer festen Ebene φ entsprechen, umhüllen nach Obigem eine Developpable Δ_6, und die gemeinsamen Tangentialebenen von Δ_6 und Σ_n liefern Punkte des fraglichen Ortes, welcher somit von der $6n$-ten Ordnung ist.

Für besondere Lagen von P zerfällt die ihm entsprechende Curve G_6; ist P identisch mit A, so zerfällt G_6 in drei Kanten des Pentaëders und eine dem Tetraëder $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ umschriebene Raumcurve dritter Ordnung. Fällt P mit T zusammen, so zerfällt G_6 in sechs Kanten des Pentaëders.

Wir könnten noch manche Anwendungen der oben gegebenen Erzeugungsart der Hesse'schen Fläche, einer Fläche dritter Ordnung entwickeln, doch wollen wir uns begnügen, einen Weg gezeigt zu haben, den man beim Studium dieser wichtigen und interessanten Fläche einschlagen kann.
